Exercice 1 On note $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions **continues** de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On cherche à déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ (i.e **continue** sur $\mathbb{R}$) vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \boxed{f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)} \qquad (*)$$

PARTIE A

On rappelle la définition des fonctions ch et sh sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

1. Montrer : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},$

$$\boxed{\mathrm{ch}^2(x)-\mathrm{sh}^2(x)=1}, \quad \boxed{\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{ch}(x)=\sqrt{\frac{\mathrm{ch}(2x)+1}{2}}}.$$

2. Etablir que les fonctions ch et cos vérifient $(*)$.
3. Déterminer les fonctions constantes solutions de $(*)$.
4. Soit f une solution de $(*)$. Pour tout λ réel, on définit la fonction f_λ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \; f_\lambda(x)=f(\lambda x).$$
Montrer que f_λ vérifie $(*)$.
5. Soit f une solution de $(*)$.
   (a) Montrer que $f(0)$ vaut 0 ou 1.
   (b) Si $f(0)=0$, prouver que f est la fonction identiquement nulle.
   (c) Si $f(0)=1$, prouver que f est une fonction paire.

PARTIE B

On suppose dans cette partie que f est une solution de $(*)$ vérifiant $f(0)=1$

1. Justifier l'existence d'un réel $a>0$ tel que $f(x)>0$ pour tout $x \in [0,a]$.
2. On suppose $f(a) \geqslant 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un réel $\lambda \geqslant 0$ tel que $f(a)=\mathrm{ch}(\lambda a)$.
   (b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n, montrer [1] :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \; f\left(\frac{a}{2^n}\right)=\mathrm{ch}\left(\lambda\frac{a}{2^n}\right)$$
   puis, à l'aide d'un raisonnement par récurrence (*forte*) sur m,
   $$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \; f\left(\frac{ma}{2^n}\right)=\mathrm{ch}\left(\lambda\frac{ma}{2^n}\right).$$
   (c) Soit $x>0$, un réel fixé.
   On définit la suite $y=(y_n)_{n\geqslant 0}$ par :
   $$y_n=\frac{aE\left(\frac{2^n x}{a}\right)}{2^n},$$
   où E désigne la fonction partie entière ($E(x)=\lfloor x \rfloor$).
   Montrer que la suite $y=(y_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.
   (d) En déduire : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x)=\mathrm{ch}(\lambda x)$.
3. On suppose $f(a)<1$. Justifier l'existence de $\lambda>0$ tel que $f(a)=\cos(\lambda a)$.
Montrer qu'il n'y a pas unicité de λ, mais qu'il en existe un minimal. On fait le choix de ce λ.
Déterminer $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

PARTIE C

Conclure.

PARTIE D - compléments

On se propose, dans cette partie, de déterminer les fonctions f vérifiant $(*)$ et qui sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, indépendamment des résultats établis dans les parties précédentes.

1. Etablir que, pour une telle fonction f, on a :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \; f''(x+y)+f''(x-y)=2f(x)f''(y).$$
En déduire l'existence d'une constante réelle k telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f''(x)=kf(x)$.
2. Etablir également : $f'(0)=0$.
3. Cours : résoudre sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle «$y''+\mu y=0$» en fonction de la valeur de la constante réelle μ.
4. Conclure.

1. On pourra utiliser les résultats de la partie A-1. et montrer que, si f vérifie $(*)$, alors pour tout réel x, $1+f(x)=2f^2(\frac{x}{2})$, puis, si $\frac{x}{2} \in [0,a]$, $f(\frac{x}{2})=\ldots$.