Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si f' ne s'annule pas, alors f ne peut pas être périodique.

Exercice 2 Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $\forall x \in]0,1[,\ f(x) > 0$. Montrer que

$$\exists c \in]0,1[\,,\ \frac{2f'(c)}{f(c)} = \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}.$$

Exercice 3 Soit f et g continues sur $[0,1]$ telles que $\sup\limits_{[0,1]} f = \sup\limits_{[0,1]} g$.

Montrer que les graphes de f et de g se coupent.

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n \sin(\pi x)$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha_n \in]0,1[$ tel que $f_n'(\alpha_n) = 0$. On construit ainsi une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en choisissant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un tel α_n.
2. Exprimer $f_n(\alpha_n)$ en fonction de π, n, α_n^{n+1} et $\cos(\pi\alpha_n)$.
3. Quelle est la limite de $f_n(\alpha_n)$ lorsque $n \to +\infty$?

Exercice 5 On définit la fonction f sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1-\ln(x)}{x}$ et la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ par

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k^2}.$$

1. Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ et en déduire les variations de f' sur $]0,+\infty[$.
2. Pour tout entier $k \geqslant 2$, justifier
$$\frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} \leqslant f(k+1) - f(k) \leqslant \frac{\ln(k)}{k^2}.$$
3. En déduire un encadrement de S_n pour tout $n \geqslant 3$. Justifier que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser un encadrement de sa limite.

Exercice 6 Soit $n \geqslant 1$, on définit f_n sur $]0,+\infty[$ par $f_n(x) = x^n \ln(x)$.

1. Montrer par récurrence que pour $x > 0$, $f_n^{(n)}(x) = n!\left(\ln(x) + 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$.
2. A l'aide de la formule de Leibniz, calculer pour $x > 0$, $f_n^{(n)}(x)$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

Exercice 7 On considère l'équation différentielle (E) « $xy' + y = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$ ».

1. Déterminer toutes les solutions de E sur l'intervalle $]0,1[$.
2. Parmi ces solutions, montrer qu'il n'en existe qu'une seule qu'on peut prolonger par continuité en 0. On note f cette fonction ainsi prolongée et donc définie sur $[0,1[$.
3. Rappeler l'énoncé du théorème de limite de la dérivée permettant de détecter si une fonction est de classe C^1 sur un intervalle.
4. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $[0,1[$?
5. Parmi les solutions de E sur l'intervalle $]0,1[$, quelles sont celles qui sont prolongeables par continuité en 1 ? On note g une telle fonction : est-elle de classe C^1 sur $]0,1]$?

Exercice 8

Etudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \ln(1+e^x)$.
En déduire : pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2$, $1+\sqrt{ab} \leqslant \sqrt{1+a}\sqrt{1+b}$.

Exercice 9 Soit f, une fonction convexe et de classe C^1 sur le segment $[a,b]$ (avec $a<b$).

1. Montrer :
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{b-a} \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$
Rappel : $\frac{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{b-a}$ s'appelle la valeur moyenne de f sur le segment $[a,b]$.

2. On va améliorer ce résultat. En appliquant l'inégalité précédente à f sur $\left[a, \dfrac{a+b}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{a+b}{2}, b\right]$, montrer qu'on a :
$$f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \tfrac{1}{2}\left(f\left(\tfrac{3a+b}{4}\right)+f\left(\tfrac{a+3b}{4}\right)\right) \leqslant \tfrac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \tfrac{1}{2}\left(f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)+\tfrac{f(a)+f(b)}{2}\right) \leqslant \tfrac{f(a)+f(b)}{2}.$$
On prendra soin de justifier chaque inégalité !

3. Complément : montrer que, si g est une fonction continue sur le segment $[a,b]$, alors il existe un $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \frac{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}{b-a}$. Autrement dit, toute fonction continue sur un segment prend sa valeur moyenne (au moins) une fois sur ce segment.
Indications pour une preuve du complément
• Preuve n°1 : commencer par justifier l'existence de x_1 et x_2 dans $[a,b]$ tels que
$$g(x_1) \leqslant g(t) \leqslant g(x_2) \text{ pour tout } t \in [a,b].$$
Encadrer alors $\frac{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t}{b-a}$ et conclure en invoquant le bon théorème.
• Preuve n°2 : rappeler l'existence et les propriétés de la fonction $H : x \mapsto H(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ sur $[a,b]$, et conclure en invoquant le bon théorème.

Exercice 10 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{\mathrm{ch}(x)}$.

1. Etudier la convexité de f.
2. En déduire : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{\exp(\mathrm{ch}(x))+\exp(\mathrm{ch}(y))}{2}\right)$.
3. De même, montrer : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{ch}\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{\ln(\mathrm{ch}(x))+\ln(\mathrm{ch}(y))}{2}\right)$.
4. Question subsidiaire : quelle est la meilleure des deux inégalités ?

Exercice 11

1. Soit $n \geqslant 1$: dénombrer les entiers à n chiffres dont la somme des chiffres vaut 3.
Remarque : bien entendu, $01789 = 1789$ est un nombre à 4 chiffres, pas à 5.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, on choisit un entier entre 1 et 10^N : quelle est la probabilité p_N que la somme des chiffres de cet entier vaille 3 ?
3. Donner un équivalent de p_N lorsque N tend vers $+\infty$.

Exercice 12

Une partie (=sous-ensemble) de $E_n = \{1,2,\ldots,n\} = [\![1 \,;\, n]\!]$ est dite **lacunaire** si cette partie est non vide et ne contient jamais deux entiers consécutifs.

Par exemple, si $n \geqslant 7$: $\{2,5,7\}$, $\{1,6\}$, $\{4\}$, $\{1,3,5,7\}$ sont des parties lacunaires de E_n.
On note L_n le nombre de parties lacunaires de E_n.

1. Déterminer, «à la main», les valeurs de L_1, L_2, L_3, L_4.
2. Démontrer : pour tout $n \geqslant 1$, $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n + 1$.
3. Prouver qu'il existe une constante C pour laquelle la suite u, définie par $u_n = L_n - C$, vérifie une relation linéaire récurrente d'ordre deux. En déduire la valeur de L_n en fonction de n.
4. Montrer que le nombre de parties lacunaires de $E_n = \{1,2,\dots,n\}$ contenant exactement p éléments est $\binom{n+1-p}{p}$.
5. En déduire une égalité faisant intervenir une somme et la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 13

Pour $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on appelle $S_{n,p}$ le nombre de surjections f de $E_n = \{1,2,\dots,n\} = [\![1 \,;\, n]\!]$ vers $E_p = \{1,2,\dots,p\} = [\![1 \,;\, p]\!]$. On s'intéresse ici à $S_{n,p}$ pour certains couples (n,p).

1. Que dire de $S_{n,p}$ lorsque $n < p$? Lorsque $n = p$?
2. Déterminer, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur de $S_{n,1}$.
3. Dans cette question, et pour alléger les notations, on note, pour tout $n \geqslant 2$, $D_n = S_{n,2}$.
   (a) Rappeler la valeur de D_2.
   (b) Prouver que, pour tout $n \geqslant 2$, $D_{n+1} = 2(D_n + 1)$.
   (c) En déduire une expression de D_n en fonction de n.
   (d) Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de E_n vers E_2 qui ne sont pas surjectives.
4. Dans cette question, on note, pour tout $n \geqslant 3$, $T_n = S_{n,3}$.
   (a) Rappeler la valeur de T_3.
   (b) Prouver que, pour tout $n \geqslant 3$, $T_{n+1} = 3(T_n + D_n)$.
   (c) A l'aide de la relation précédente, montrer que la suite (T_n) vérifie une relation linéaire récurrente d'ordre deux non-homogène, puis qu'il existe une constante C telle que la suite $(T_n - C)$ vérifie une relation linéaire récurrente d'ordre deux. En déduire une expression de T_n en fonction de n.
   (d) Retrouver le résultat de la question précédente à l'aide d'un raisonnement combinatoire direct, en comptant le nombre d'applications de E_n vers E_3 qui ne sont pas surjectives.
5. Soit $f : E_{n+1} \to E_n$, une application surjective.
   Montrer qu'il existe un unique élément dans E_n ayant exactement deux antécédents par f.
   De combien de façons peut-on choisir ces deux antécédents ? En déduire : $S_{n+1,n} = \dfrac{n(n+1)!}{2}$.

Solutions de l'exercice 1 :

Raisonner par contraposition.

Solutions de l'exercice 2 :

Poser $g(x) = f(x)^2 f(1-x)$.

Solutions de l'exercice 3 :

Justifier que $\sup\limits_{[0,1]} f = f(a)$ et $\sup\limits_{[0,1]} g = g(b)$ où $(a,b) \in [0,1]$ et considérer $h = f - g$.

Solutions de l'exercice 4 :

1 : Peut-on appliquer Rolle ?

2 : Ne pas oublier que $f_n'(\alpha_n) = 0$ ce qui permet d'éléminer $\sin(\pi\alpha_n)$.

3 : Majorer la valeur absolue.

Solutions de l'exercice 5 :

2 : TAF et IAF sont sur un bateau...

3 : attention de bien appliquer une inégalité lorsqu'elle est vérifiée.

Repérer les sommes télescopiques. Monotonie de (S_n) ?

On rappelle qu'une quantité qui dépend de n n'est pas considérée comme constante lorsque n est la variable...

Ne pas confondre (théorème d'encadrement) et (passage à la limite).

Solutions de l'exercice 6 :

Calculer f_{n+1}' et ne utiliser $f_{n+1}^{(n+1)} = \left(f_{n+1}'\right)^{(n)}$.

Déterminer les dérivées $k-$ième de x^n et de $\ln(x)$. Ne pas oublier le cas particulier $k = 0$ pour la seconde.

Solutions de l'exercice 7 :

1 : on rappelle $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + \text{ constante }$.

Pour déterminer une solution particulière : méthode de la variation de la constante !

5 : on rappelle $(g\ C^1) \Rightarrow (g\ D^1)$.

Solutions de l'exercice 9 :

Comment encadrer une fonction convexe sur un segment ?

Solutions de l'exercice 12 :

3 : $L_n = F_{n+2} - 1$.

5 : Question délicate. Justifier qu'en associant à toute partie lacunaire $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ à p éléments (où nécessairement $p \leqslant \ldots$) la liste $(a_1, a_2 - 1, a_3 - 2, \ldots, a_p - (p-1))$ on crée une bijection entre l'ensemble des parties lacunaires à p éléments et l'ensemble des parties à p éléments de E_{n-p+1}.

Solutions de l'exercice 13 :

$4c$: avec $T_{n+1} = 3T_n + 3 \times 2^n - 6$, on arrive à obtenir $T_{n+2} - 5T_{n+1} + 6T_n = 6$ puis $(T_n - 3)$ vérifie $T_{n+2} - 5T_{n+1} + 6T_n = 0$.