Exercice 1 Pour tout entier $n \geqslant 3$, on considère l'équation

$$(E_n) : x^n - nx + 1 = 0.$$

On définit la fonction f_n par : $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

Une première suite

1. Etudier les variations de f_n sur $[0, 1]$.
   Justifier que l'équation (E_n) admet, pour chaque entier $n \geqslant 3$, une unique solution x_n dans l'intervalle ouvert $]0, 1[$.
2. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x_n)$, et en déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.
   La suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge-t-elle ?
3. Justifier : $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n^n) = 0$.
4. En déduire l'équivalent : $x_n \sim \dfrac{1}{n}$, et préciser la limite de $(x_n)_{n\geqslant 3}$.
5. Montrer qu'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + x_n^n)^n = 1$.
6. En déduire un équivalent simple de $\left(x_n - \dfrac{1}{n}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$, et un développement asymptotique de x_n à deux termes.

Une seconde suite

1. Montrer que l'équation (E_n) possède, pour tout entier $n \geqslant 3$, une seule racine y_n dans l'intervalle ouvert $]1, +\infty[$.
2. Déterminer la valeur de la limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n}{n}$.
3. En déduire qu'on a, à partir d'un certain rang : $1 < y_n < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. La suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$ converge-t-elle ?
5. Montrer que l'on a l'équivalent : $(y_n - 1) \sim \dfrac{\ln n}{n}$ lorsque $n \to +\infty$.
   On a donc un développement asymptotique de y_n à deux termes : $y_n = 1 + \dfrac{\ln n}{n} + o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 2

1. <u>Etude préliminaire d'une suite.</u>
   Soit $u = (u_n)_{n\geqslant 1}$, la suite définie par, pour $n \geqslant 1$: $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.
   (a) Montrer que les suites $(a_n = u_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(b_n = u_{2n-1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note L sa limite.
   (c) Justifier : $\forall n \geqslant 1$, $u_n < 0$.
2. <u>Etude du polynôme P_n.</u>
   Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit le polynôme P_n par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots \frac{x^n}{n} = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$
   (a) Déterminer les racines du polynôme dérivé P'_n, en séparant selon la parité de n, les racines réelles des racines complexes non réelles.

(b) Montrer que, si r est une racine réelle de P_n, alors $P_n{}'(r) \neq 0$.
On verra dans le cours sur les polynômes que cela implique que les racines réelles de P_n sont simples (i.e de multiplicité un).

3. Etude d'une suite.

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, le polynôme P_n possède une et une seule racine dans l'intervalle $[0, +\infty[$: on note x_n cette racine. Justifier $x_n \in [0, 1]$.

   (b) Pour $n \geqslant 2$: déterminer le signe de $P_{n+1}(x_n)$.
   En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$, puis sa convergence. On note ℓ sa limite.

4. Quelques résultats utiles

   (a) Rappeler un énoncé de l'inégalité des accroissements finis.

   (b) Calculer la valeur exacte de $C = x_2$. Comparer C et 1.

   (c) On pose, pour $n \geqslant 2$ et $x \in [0, 1[$:
   $$G_n(x) = -1 - \ln(1 - x) - P_n(x).$$
   Calculer et simplifier $G_n{}'(x)$ (nombre dérivé de G_n en x).

   (d) En déduire : pour tout $x \in [0, C]$ et pour tout entier $n \geqslant 2$,
   $$|G_n{}'(x)| \leqslant \frac{C^n}{1 - C} \quad \text{puis} \quad |G_n(x)| \leqslant |x| \frac{C^n}{1 - C}.$$

5. Conclusion

   (a) Justifier, pour tout $n \geqslant 2$: $x_n \in [0, C]$.

   (b) En déduire : $|1 + \ln(1 - x_n)| \leqslant \dfrac{C^{n+1}}{1 - C}$.

   (c) Déterminer la valeur de ℓ.

Exercice 3 (*Facultatif*) But : on se propose de **déterminer l'existence et la valeur du plus grand entier naturel non nul n tel que**
$$\left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$$
est un nombre premier.

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = \left\lfloor \sqrt{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \sqrt{2} \right\rfloor = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \lfloor \sqrt{p} \rfloor$.
   A l'aide d'une calculatrice ou Python, établir la liste des entiers $1 \leqslant n \leqslant 50\,000$ pour lesquels $f(n)$ est un nombre premier, puis formuler une conjecture.

2. (a) Soit $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$, justifier
   $$f(n) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i^2}^{(i+1)^2-1} \left\lfloor \sqrt{j} \right\rfloor + \sum_{j=k^2}^{n} \left\lfloor \sqrt{j} \right\rfloor.$$

   (b) En déduire :
   $$f(n) = \frac{k(k-1)(4k+1)}{6} + (n + 1 - k^2)k.$$

3. Un peu d'arithmétique !

   (a) Montrer que, avec $k \in \mathbb{N}$ alors $m = \dfrac{k(k-1)(4k+1)}{6}$ est un entier.

   (b) Montrer que, si $k > 6$, alors m et k ne sont pas premiers entre eux.

4. Conclure.