`Exercices ou premières questions d'exercices posés à l'oral des concours.`

Exercice 1 ENSEA-ENSAM

1. Etudier les variations de $f : x \longmapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \ln^2(t)\,\mathrm{d}t$ (sans les limites).
2. Résoudre $x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)\,y = 1$ sur $]0, +\infty[$ en posant $z(x) = x^2y(x)$.
3. Pour $n \in \mathbb{Z}$, résoudre $y'' + y = \cos(nx)$.
4. Soit $a \in \mathbb{R}$ on définit $M(a) = \begin{pmatrix} 1-2a & a & a \\ a & 1-2a & a \\ a & a & 1-2a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ le produit $M(a) \times M(b)$.
   (b) A quelle(s) condition(s) la matrice $M(a)$ est-elle inversible. Donner alors son inverse.
   (c) Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $M(a)^n = M(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_nA + v_nA^2$. Calculer alors A^n.
6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que A est inversible.
7. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut se décomposer comme somme d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure. Montrer que l'on peut choisir ces matrices inversibles.
8. On pose $u_0 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}e^{u_{n+1}} = \dfrac{1}{2}u_n$.
   (a) Montrer que ces deux conditions définissent bien une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.
9. Résoudre l'équation $3^x + 4^x = 5^x$ dans $\mathbb{R}$.
10. Résoudre l'équation $\arcsin(x) + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
11. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $G : x \in [0,1] \longmapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |x-t|\, g(t)\, dt$.
    (a) Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et calculer G''.
    (b) En déduire l'existence de $f'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$. Y a-t-il unicité d'une telle fonction g ?
12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{2ik}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(2k)$.
13. Soit $A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
    (a) Calculer A^2, la matrice A est-elle inversible ?

(b) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$, A^n en fonction de A et de A^2.

14. Montrer que $\forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^4(\alpha) + \sin^4(\alpha) = 1 - \frac{1}{2}\sin^2(2\alpha)$ puis que si $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ alors
$$\left(a^2\cos^2(\alpha) + b^2\sin^2(\alpha)\right)\left(b^2\cos^2(\alpha) + a^2\sin^2(\alpha)\right) = a^2b^2 + \frac{\left(a^2-b^2\right)^2}{4}\sin^2(2\alpha).$$

15. Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi \left(at + bt^2\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

16. Soit $a \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $x \in \left]-1,1\right[$, montrer que si $f(x) = \arctan\left(\tan(a)\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ alors f est dérivable sur $\left]-1,1\right[$,et $f'(x) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{x+e^{2ia}}\right)$.

17. Déterminer les matrices de M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit M une solution, montrer qu'il existe trois matrices A, B et C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que M soit une combinaison linéaire de A, B et C.

18. Soit $I = \displaystyle\int_{-\ln(2)}^0 \frac{\mathrm{d}x}{3\mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x}$, déterminer $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $I = \sqrt{2}\left(\dfrac{\pi}{a} + b\arctan\sqrt{2}\right)$

19. Montrer que $1 + 2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) = 0$, en déduire $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Petites Mines

20. Résoudre $y'' - 3y' + 2y = e^x + x - 1$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

21. Soit $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x^2}$, peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

22. Soient $(m,p) \in \mathbb{N}^2$, montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$.
On pourra raisonner par récurrence sur n.

23. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+1)(3-x)}$, et F la primitive de f sur $]3,+\infty[$ nulle pour $x = 4$.
Etudier les asymptotes de G définie sur $]3,+\infty[$ par $G(x) = xF(x)$.

24. Soit F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_{1+\sin x}^{\cos x} e^{t^2+x}\mathrm{d}t$, déterminer la dérivée en $x = 0$.

25. Exprimer $\sin(3x)$ à l'aide de puissances de $\sin x$ et de $\cos x$. En déduire les primitives de $x \longmapsto \dfrac{\sin(3x)}{2 - \sin^2(x)}$ (poser ensuite $u = \cos x$).

CCP

26. (2016) - Soit f définie par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.

(a) Montrer que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{3}{2}$, que $f(f(x)) > 1$ et que f est $\dfrac{1}{2}$−lipschitzienne sur $[1,+\infty[$.

(b) Montrer qu'il existe un unique $\ell > 1$ tel que $f(\ell) = \ell$.

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a > 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Justifier que pour $n \geqslant 2$, u_n existe et $u_n \geqslant 1$ puis montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

27. Résoudre $2x(x-1)y'(x) + (x-2)y(x) = -2$.

28. On note (E) l'équation différentielle $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{1+x^2}$
   (a) Donner les solutions de l'équation homogène.
   (b) Donner les solutions de (E).

29. On considère l'équation $(E) : (2x+1)y''(x) + (4x-2)y'(x) - 8y = 0$.
   (a) Donner une condition sur α pour que $y : x \longmapsto e^{\alpha x}$ soit solution de (E). On choisit un tel α.
   (b) Donner une condition sur z pour que $y : x \longmapsto z(x)e^{\alpha x}$ soit solution de (E).
   (c) Donner les solutions de (E).

30. Quelles sont les racines de $2z^2 + 3z + 2$ sur $\mathbb{C}$?

31. Montrer que pour $n \geqslant 7$, $\left|e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1\right| < 1$.

32. Etudier l'équation $\arctan(x) + x = 1$.

33. Résoudre $(z+1)^n = -(z-1)^n$ où $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ est l'inconnue.

34. Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{x^2-1}y = 2x$.

35. Résoudre $2x^2y' + y = 1$ sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, +\infty[$ et sur $\mathbb{R}$.

36. Soit P un polynôme unitaire (i.e. de coefficient dominant égal à 1) de degré 3 et tel que $P(0) = 0$. Calculer $P(1) + P(j) + P(j^2)$ où $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

37. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n définie par $f_n(x) = n^2x^n(1-x)$. Déterminer le maximum u_n de f_n sur $[0,1]$. Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

38. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n définie par $f_n(x) = \arctan\left(\dfrac{x+n}{1+nx}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   (a) On fixe $x \in]0, +\infty[$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.
   (b) Quelle est la monotonie de f_n sur $]0, +\infty[$?

39. On considère la fonction f définie sur $]0, 1]$ par $f(t) = \dfrac{1-t^3}{t}$.
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle I à préciser.
   (b) Soit u la bijection réciproque, définie sur I, montrer que $\forall x \in I$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$.
   (c) Justifier que u est dérivable sur I et que pour $x \in I$, $u'(x) = \dfrac{-u(x)}{3u(x)^2 + x}$.
   (d) Montrer que $u(1) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et que $|u'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3u(x)}$.

(e) Montrer que $u(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

40. Soient $a>0$ et $S_a : \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'application qui à f associe
$$S_a(f) : x \longmapsto \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
    (a) Soit $f : t \longmapsto \sin\left(\dfrac{\pi t}{a}\right)$, déterminer $S_a(f)$.
    (b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, montrer que $S_a(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
    (c) Montrer que S_a n'est ni injective, ni surjective.

41. Soit $J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et soient F et G les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par
$$F(x) = I_3 + (e^x - 1)\,J \text{ et } G(x) = I_3 - (e^x+1)\,J$$
    (a) Calculer J^2, la matrice J est-elle inversible ?
    (b) Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x)F(y) = F(x+y)$, que peut-on en déduire sur l'inversibilité de $F(x)$?
    (c) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, calculer de même $G(x)G(y)$. Que peut-on en déduire ?
    (d) Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $G(x) = F(y)\,G(x)\,F(y)^{-1}$.

Mines-Ponts

42. (2017) - Soit $f : x \in \mathbb{R} \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(u_n)}$.
    (a) Trouver $C \in \left]0,1\right[$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x) - f(y)| \leqslant C\,|x-y|$.
    (b) Montrer qu'il existe ℓ unique dans $\mathbb{R}$ tel que $f(\ell) = \ell$.
    (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq \ell$.

43. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et g_n définie sur $[0,1]$ par $g_n(t) = e^t\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

    Justifier que g_n est dérivable sur $[0,1]$ et que $\forall t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \dfrac{e^t}{n}$.

Centrale PC

44. Soit $T = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer T^k pour $k \in \mathbb{N}$.

45. (Sans calculatrice) Comparer π^3 et 3^π (quel est le plus grand ?).

46. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

47. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer les applications f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telles que
    $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(a-x)$

Pour le fun

48. Soit $\lambda \geqslant 1$, on définit pour $x \geqslant 0$, $f_\lambda(x) = \dfrac{2\mathrm{sh}(x)}{e^{\lambda x}}$. Déterminer $\sup\limits_{\lambda \geqslant 1}\left(\sup\limits_{x \geqslant 0} f_\lambda(x)\right)$.

49. Peut-on placer tous les carrés de côté de longueur $\dfrac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$) dans un carré de longueur 1 sans qu'ils se chevauchent ?

Exercice 2

1. **X-ESPCI - PC - 2017**
   Déterminer les $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que $a + b + c = 1$, $abc = 1$ et $|a| = |b| = |c| = 1$.

2. **CCP - TSI - 2017**
   Montrer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & n & \ddots & \vdots \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & & \ddots & 1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix} = \dfrac{(-n)^{n-1}(n+1)}{2}$.

3. **CCP - TSI - 2017**
   Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \end{vmatrix}$.

4. **Mines-Ponts - PC - 2016**
   Montrer que l'équation $xe^{nx} = 1$ possède une unique solution x_n pour tout entier $n \geqslant 1$. Montrer que la suite (x_n) converge et calculer sa limite. Donner un équivalent de x_n.

5. **Mines-Ponts - PSI - 2016**
   Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x+1) = \dfrac{\pi}{2}$.

6. **Mines-Ponts - PSI - 2016**
   Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 \binom{n}{k}$.

7. **Mines-Ponts - PSI - 2016**
   Trouver les nombres complexes z tels que le triangle ABC de sommets d'affixes z, z^2 et z^3 ait l'origine pour orthocentre.

8. **CENTRALE - PSI - 2016**
   On cherche à résoudre : $2xy'(x) - 2y(-x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.
   Montrer que toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
   Montrer que le problème, sous certaines conditions supplémentaires que l'on précisera, se ramène à deux équations différentielles d'ordre 1, et résoudre.

9. **CCP - PC - 2016**

   Domaine de définition de $f(x) = \text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

   Montrer que f est C^∞ et calculer f'.

10. **CCP - PC - 2016**

    On donne un ensemble E, de cardinal n, et pour tout $i \in [[0,n]]$, on pose Ω_i, l'ensemble des couples (A,B) de parties de E telles que $\text{card}(B) = i$ et $A \cup B = E$. Trouver $\text{card}(\Omega_i)$. En déduire le cardinal de $\mathcal{R}$, l'ensemble des couples (A,B) de parties de E telles que $A \cup B = E$.

11. **Mines Télécom - PC - 2016**

    Discuter et résoudre : $\left\{\begin{array}{ccccccc} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array}\right.$.

12. **ENSAM - PT - 2016**

    Montrer : $\forall x > 0$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

    En déduire la limite en $+\infty$ de $\dfrac{x}{\text{Arctan}(x)} - \dfrac{2}{\pi}x$.

13. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2016**

    On donne f dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

    Montrer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\left(f(n) + f(1)\right) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2}\right) f'(x)\mathrm{d}x$.

14. **? ? - ? ? - 2016**

    Soit f et g, deux fonctions $n+1$ dérivables sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(k)} g^{(n-k)}$ est une primitive de la fonction $H = fg^{(n+1)} + (-1)^n f^{(n+1)} g$.

15. **CENTRALE - PC - 2015**

    Résoudre «$x(x-1)y' + y = x$» sur $\mathbb{R}$.

16. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2014**

    Montrer que M, matrice carrée possédant un et un seul terme non nul par ligne et par colonne, est inversible.

17. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2014**

    Trouver toutes les fonctions u de classe C^1 sur $[-1,+1]$ vérifiant : $xu'(x) + u(x) = x$

18. **Polytechnique-ESPCI - PC -2014**

    Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on note $M = \begin{pmatrix} 0 & z & z^2 \\ z^{-1} & 0 & z \\ z^{-2} & z^{-1} & 0 \end{pmatrix}$. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat subsiste-t-il pour $n = -1$?.

19. **Mines-Ponts - PC - 2014**

    Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\left((x+1)^{1/x} - x^{1/x}\right)(x\ln(x))^2}{x^{x^{1/x}} - x}$.

20. **CENTRALE - PC - 2014**
 Montrer que A, matrice réelle de taille n, dont les coefficients diagonaux sont nuls et tous les autres valent 1, est inversible, et donner son inverse.

21. **CENTRALE - PSI - 2014**
 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(1+x)^{2n} = (1-x)^{2n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
 Calculer le produit des solutions non nulles.

22. **CCP - MP - 2014**
 Soit $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, la matrice dont tous les coefficients valent 1. Exprimer $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ à l'aide de J et de I_3, et en déduire un polynôme annulateur de A de degré 2. Calculer A^n.

23. **CCP - PC - 2014**
 On pose : $g(x) = x\sin(x)$: calculer $g''(x) + g(x)$.
 Résoudre sur $\mathbb{R}$: (E_1) «$y'' + y = \cos(x)$» et (E_2) «$y'' - y = x$».
 Donner toutes les solutions paires de (E_1) et les solutions impaires de (E_2).
 Trouver toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ telles que : $f''(x) + f(-x) = x + \cos(x)$.

24. **CCP - PC - 2014**
 Développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f(t) = e^{e^t - 1}$.
 En déduire $f^{(k)}(0)$ pour $0 \leqslant k \leqslant 3$.

25. **CCP - PSI - 2014**
 Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}(x) - 1} - \dfrac{2}{x^2}$ et $g(x) = \dfrac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2}$ sont définies pour $x \neq 0$ puis qu'elles sont prolongeables par continuité en 0.

26. **TELECOM Sud Paris - MP - 2014**
 Soit $M = \mathrm{I}_n + XY^T$ où $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$. Montrer que M^2 est combinaison linéaire de I_n et de M. Discuter l'inversibilité de M.

27. **ENTPE - PSI -2014**
 Montrer que $|\cos(n)| + |\sin(n)| \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

28. **ENSAM - PT - 2014**
 Montrer que l'ensemble des polynômes P solutions de «$P(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\mathrm{d}t$» est stable par combinaison linéaire. On rappelle que cela revient à prouver que si P et Q sont deux polynômes ayant cette propriété, alors $\lambda P + \mu Q$ a également cette propriété pour tous les réels λ et μQ.
 Montrer que, si P est solution, P' l'est aussi.
 Montrer qu'un polynôme P de degré 2 ne peut pas être solution et conclure quant à l'ensemble des solutions polynomiales de ce problème.

29. **ENSAM - PT - 2014**
 On note C une matrice colonne à n lignes ($n \geqslant 2$), et L une matrice ligne à n colonnes et $A = CL - \mathrm{I}_n$. Peut-on avoir $A = \mathrm{I}_n$? Montrer : $A^2 = (LC - 2)A + (LC - 1)\mathrm{I}_n$.

30. **CCP - TSI -2014**
 Résoudre $x^2 y' + y = 1$ dans $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.

On note f une solution sur $]0,+\infty[$: étudier la limite de f en 0^+.
Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

31. **Polytechnique-ESPCI - PC - 2013**

La suite de terme général $u_n = \sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$ (n radicaux) converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

32. **MINES-PONTS - PSI -2013**

Trouver la limite ℓ de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

33. **CCP - MP - 2013**

Montrer que, si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
Trouver le signe de $u_n = \mathrm{sh}\left(\frac{1}{n}\right) - \tan\left(\frac{1}{n}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

34. **CCP - PC - 2013**

Montrer que $T(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$ existe sur $\mathbb{R}$.
Montrer : $T(x) + T(-x) = 1$, interprétation ?
Calculer $T(0), T(1), T(-1), T(2), T(-2)$.

35. **CCP - PC - 2013**

Montrer : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin(t) \leqslant t$.

36. **CENTRALE - PC - 2012**

Soit A, matrice dont les coefficients de la première ligne, la première colonne et la diagonale valent 1, tous les autres étant nuls. Montrer que A est inversible et trouver son inverse.

37. **ENTPE - MP - 2012**

Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$ existe et que (I_n) tend vers 0.

Trouver un développement asymptotique à deux termes de I_n de la forme $I_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

38. **PT - 2012**

Soit f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en 0. Trouver la limite en 0 de $\dfrac{f(2x)-f(x)}{2x}$.