PROBLEME

1. On se propose de résoudre, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$(E) \ll x^2 \cdot y''(x) - xy'(x) + y(x) = 2x \gg.$$

Deux méthodes vous sont proposées.

***** 1^{ère} méthode (*changement de fonction*) *****

(a) Montrer que l'équation homogène associée

$$(EH) \ll x^2 \cdot y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0 \gg$$

possède une solution sous la forme $y(x) = x^a$, où a est une constante que l'on déterminera.

(b) On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$: $f(x) = x^a g(x)$.

Montrer que f est solution de (E) si, et seulement si g' (dérivée de g) est solution de l'équation différentielle (F) suivante :

$$(F) \ll xy'(x) + y(x) = \frac{2}{x} \gg.$$

(c) Résoudre l'équation (F) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

(d) Conclure.

***** 2nde méthode (*changement de variable*) *****

Si y est une fonction deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$, on définit la fonction z sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, y(x) = z(\ln x), \text{ autrement dit } \forall t \in \mathbb{R}, z(t) = y(e^t).$$

(a) Montrer que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si, et seulement si z est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (G) suivante

$$(G) \ll z''(t) - 2z'(t) + z(t) = 2e^t \gg.$$

(b) Résoudre cette équation différentielle (G) sur $\mathbb{R}$.

(c) Conclure.

2. Les solutions de (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ peuvent-elles se prolonger en une fonction continue en 0? Si oui, une solution ainsi prolongée est-elle dérivable en 0? Que peut-on en conclure?

3. On se propose maintenant de déterminer toutes les fonctions f vérifiant le problème suivant, noté (P) :

$$(P) \ll f \text{ est définie et dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et, pour tout } x \in]0, +\infty[, f'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \gg.$$

Soit f , une solution de ce problème (P).

(a) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

(b) Montrer que f est une solution de l'équation différentielle (E).

(c) Conclure.