

Exercice 1 On désire calculer la quantité $\Phi(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{dt}{(t+1)^2(t^2+1)}$ par trois méthodes.

Étude générale de $\Phi(x)$

1. On pose $f(t) = \frac{1}{(t+1)^2(t^2+1)}$.
Sur quel(s) ensemble(s) la fonction f admet-elle des primitives ?
2. En déduire l'ensemble de définition D de la fonction Φ .
3. Pour $x \in D$, quelle relation y a-t-il entre $\Phi(x)$ et $\Phi\left(\frac{1}{x}\right)$?

1^{ère} méthode

1. Soit $x \in D$: exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de F , où F désigne une primitive quelconque de f sur le bon intervalle (que l'on précisera).
2. Justifier que Φ est dérivable sur D : calculer et simplifier $\Phi'(x)$.
3. En déduire une expression précise de $\Phi(x)$ pour tout $x \in D$.

2^{ème} méthode

1. Pour tout $x \in D$: effectuer le changement de variables $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale $\Phi(x)$.
2. Simplifier et calculer la quantité $\Phi(x) + \Phi\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. Retrouver l'expression de $\Phi(x)$.

3^{ème} méthode

1. La théorie de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles assure l'existence des constantes réelles a, b, c et d vérifiant $f(t) = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{ct+d}{t^2+1}$ pour tout réel $t \neq -1$.
Déterminer ces constantes.
2. Déterminer alors l'expression générale des primitives de f sur les ensembles à préciser.
3. Retrouver à nouveau l'expression de $\Phi(x)$.

Une application numérique

Soit un réel α vérifiant $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Calculer $I(\alpha) = \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}-\alpha} \frac{\cos^2(\theta)}{1 + \sin(2\theta)} d\theta$.

Exercice 2 «DL_n(a)» signifie «développement limité d'ordre n au point a ».

1. Donner le DL₃(0) de $x \mapsto g(x) = \frac{e^x}{1 + \operatorname{ch}(x)}$.
2. Pour tout paramètre k réel, on définit la fonction f_k par :
$$f_k(x) = \sqrt{1+x} + k \frac{e^x}{1 + \operatorname{ch}(x)}.$$

Déterminer le DL₃(0) de f_k .

3. On note $\mathcal{C}_k$ la courbe représentative de f_k dans un repère orthonormé.

- (a) Donner une équation de T_k , tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 0.
- (b) Montrer que, pour k parcourant $\mathbb{R}$, toutes les droites T_k sont concourantes en un point dont on déterminera les coordonnées.
4. Déterminer, en fonction de k , la position relative au voisinage de 0 de $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{T}_k$: illustrer ces différentes situations par un schéma clair.
5. On définit la fonction ψ par $\psi(x) = \frac{f_k(x)}{x}$.
Montrer qu'il existe une seule valeur de k permettant de prolonger ψ **par continuité** en 0. On considère cette fonction ψ . Justifier que la fonction ψ est dérivable en 0, donner la valeur de $\psi'(0)$ et tracer l'allure de la courbe représentative de ψ avec sa tangente au voisinage de 0.
6. (a) Déterminer les primitives de f_k .
(b) Existe-t-il $k \in \mathbb{R}$ tel que $\int_0^1 f_k(x) dx = 0$?

Exercice 3 Exercice facultatif Dans cet exercice, on souhaite prouver la proposition suivante :

« si x est un nombre rationnel non nul, alors $e^x = \exp(x)$ est un nombre irrationnel ».

1. On commence par poser, pour tout réel x non nul et tout entier naturel n :

$$I_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{-1}^1 (1-t^2)^n e^{xt} dt.$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $I_{n+2}(x) = \lambda(x)I_n(x) + \mu(x)I_{n+1}(x)$, où λ et μ sont deux fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}^*$ que l'on précisera.
- (b) En déduire que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n et à **coefficients entiers** tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $I_n(x) = \frac{P_n(x)e^x - P_n(-x)e^{-x}}{x^{2n+1}}$.
2. Soit x , un nombre rationnel non nul fixé, donné sous la forme $x = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}^*$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que $e^x > 0$ soit également rationnel, avec $e^x = \frac{a}{b}$, avec $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$.
- (a) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $abp^{2n+1}I_n(x)$ est un entier **non nul**.
- (b) Montrer que $abp^{2n+1}I_n(x)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
- (c) Conclure.

3. Complément 1

Que peut-on dire de $\ln(x)$ lorsque x est un nombre rationnel strictement positif différent de 1 ?

4. Complément 2

Soit a et b , deux **entiers** supérieurs à 2, distincts et premiers entre eux.

On veut résoudre l'équation (E) « $\lambda \ln(a) + \mu \ln(b) = 0$ » d'inconnue (λ, μ) .

• Donner une solution $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ différente de la solution triviale $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

• Montrer que, si on suppose $(\lambda, \mu) \in \mathbb{Q}^2$, alors $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

On dit que $\ln(a)$ et $\ln(b)$ sont *algébriquement indépendants*.