

Exercice 1

On pose $f(x) = \arctan\left(\frac{x-2}{x}\right) - \arctan(x-1)$.

1. Préciser D_f , l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Donner la valeur de $f(1)$ et calculer la limite $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x))$.
3. Sur quel ensemble la fonction f est-elle dérivable ? Lorsque cela est possible, calculer et simplifier $f'(x)$.
4. En déduire la fonction f .
5. Calculer $f(1 + \sqrt{3})$ de deux façons, puis en déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}(x) - 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$.

1. Déterminer, preuve à l'appui, D_f , l'ensemble de définition de f .
On se propose de donner une expression simple de f par deux méthodes différentes.
2. **Première méthode : étude de fonction**
 - (a) Sur quel intervalle I , la fonction f est-elle dérivable ? Calculer alors $f'(x)$ pour $x \in I$.
 - (b) En déduire une expression simple de f sur D_f .
3. **Seconde méthode : avec des fonctions circulaires auxiliaires**
 - (a) Pour tout $x \in D_f$, montrer qu'il existe un unique réel $\theta \in]0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$.
 - (b) Donner des factorisations de
$$1 + e^{i\theta} = \dots \quad \text{et} \quad 1 - e^{i\theta} = \dots$$
En déduire les factorisations de
$$1 + \cos(\theta) = \dots \quad \text{et} \quad 1 - \cos(\theta) = \dots$$
 - (c) Exprimer $f(x)$ en fonction de la variable θ , simplifier cette expression, et retrouver le résultat de la question (2b).
4. **Troisième méthode : avec des fonctions hyperboliques**
 - (a) On pose $g(t) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(t)) - 2\operatorname{Arctan}(e^t)$ où $\operatorname{th}(t) = \frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}(t)}$.
Prouver que cela donne une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Calculer $g'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?
 - (b) Soit $y \in \mathbb{R}$, déterminer le réel z , dépendant de y , tel que $\frac{1 + \operatorname{th}(y)}{1 - \operatorname{th}(y)} = e^z$.
 - (c) Pour tout réel $x \in]-1, +1[$, montrer qu'il existe un unique réel y tel que $x = \operatorname{th}(y)$.
 - (d) Conclure.