Exercice 1 Etude d'une équation. Pour $\omega \in \mathbb{C}$, on considère l'équation, d'inconnue z,

$$(E_\omega) \qquad z^3 + \omega z^2 - \overline{\omega} z - 1 = 0.$$

On s'intéresse aux **solutions** de cette **équation** (E_ω), autrement dit aux **racines** du **polynôme** P défini par

$$P(z) = z^3 + \omega z^2 - \overline{\omega} z - 1 = 0.$$

1. Quelles sont les solutions de (E_0) ?
   On suppose désormais que $\omega \neq 0$.
2. On suppose, dans cette question que $\omega \in \mathbb{R}$.
   (a) Déterminer, en fonction de ω les solutions de (E_ω).
   (b) Discuter en fonction de ω le nombre de solutions de module 1.
3. On suppose dans cette question que $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et on pose $\omega = \alpha + i\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Que dire de β ?
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, exprimer, en fonction de x, α et β les parties réelles et imaginaires de $x^3 + \omega x^2 - \overline{\omega} x - 1$.
   (c) A quelle condition sur ω, l'équation (E_ω) admet-elle des solutions réelles ? Précisez alors quelles sont ces solutions.
4. Un exemple : si on suppose que $\omega = 5j$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, déterminer les solutions de (E_ω).
5. On définit f sur $]-\pi, \pi[$, par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} - 2\sin(x)$.
   (a) Etudier la parité de f.
   (b) Etudier les variations de f sur $[0, \pi[$. On montrera que f' s'annule en une unique valeur notée φ dont on donnera la valeur exacte de son cosinus.
   (c) Calculer $f(\varphi)$.
   (d) Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sin(3\alpha) = \left(4\cos^2(\alpha) - 1\right)\sin(\alpha)$.
   (e) Montrer que $f(x) = -\dfrac{\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}$.
6. On suppose que $\omega = i\beta$ où $\beta \in \mathbb{R}^*$. Soit $z = e^{ix}$, où $x \in]-\pi, \pi[$, un complexe de module 1.
   (a) Justifier que
   $$z^3 + \omega z^2 - \overline{\omega} z - 1 = 2ie^{\frac{3ix}{2}} \left(\sin\left(\frac{3x}{2}\right) + \beta\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$
   puis que z est solution de $(E_{i\beta})$ si et seulement si
   $$\beta = -\frac{\sin\left(\dfrac{3x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}.$$
   (b) Montrer que pour $|\beta| < -f(\varphi)$ l'équation (E_ω) a trois racines de module 1.
7. Localisation des racines. On revient au cas général où $\omega \in \mathbb{C}^*$.
   Soit g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 - |\omega|\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x^3}$.
   (a) Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[$ et justifier que g admet une unique racine noté r sur $]0, +\infty[$.
   (b) Soit z une solution de (E_ω)
   • Montrer : $z \neq 0$.
   • Montrer :
   $$|z|^3 \leqslant |\omega|\left(|z|^2 + |z|\right) + 1.$$
   • Calculer $g(1 + |\omega|)$ et en déduire :
   $$|z| \leqslant 1 + |\omega|.$$

Exercice 2 On définit une fonction f par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}.$$

1. Quel est D_f, l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. Justifier que f est deux fois dérivable sur D_f et préciser les expressions factorisées de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in D_f$.

   <u>Indication</u> : la dérivée seconde est de la forme $f''(x) = \dfrac{ax(x+1)}{(1+x+x^2)^b}$ où a et b sont des entiers naturels.
3. Dresser le tableau de variations-signes de f' puis le tableau de variations de f sur D_f.
   Donner alors l'allure de la courbe représentative de f.
4. Montrer que l'intervalle $I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ est stable par f.
5. Montrer qu'il existe une constante $C \in]0,1[$ telle que $|f'(x)| \leqslant C$ pour tout $x \in I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
   Que peut-on en déduire concernant la fonction f ?
6. Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 + X - 1$ possède une et une seule racine réelle L.
   En déduire que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution réelle ℓ. Vérifier $\ell \in I = \left[\frac{1}{3}, 1\right]$.
7. On définit la suite $u = (u_n)_{n \geqslant 0}$ par
   $$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Montrer que la suite u est bornée.
   (b) Montrer :
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| \leqslant C|u_n - \ell|.$$
   (c) Montrer :
   $$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant C^n.$$
   (d) Que peut-on en conclure ?
8. Indiquer une méthode permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
9. <u>Complément</u> : soit g, la fonction de la variable complexe z définie par
   $$g(z) = \frac{1}{1+z+z^2}.$$
   (a) Déterminer le domaine de définition $\widehat{\mathbb{C}}$ de g (i.e la plus grande partie de $\mathbb{C}$ sur laquelle la fonction g est définie). On considère donc $g : \left| \begin{array}{ccl} \widehat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & g(z) = \dfrac{1}{1+z+z^2} \end{array} \right.$.
   (b) Soit un nombre complexe $\omega \in \mathbb{C}$: en fonction de ω, déterminer le nombre de solutions z dans $\widehat{\mathbb{C}}$ de l'équation « $g(z) = \omega$ ». En déduire si l'application g est injective, surjective, bijective.
   (c) Déterminer l'ensemble $g(\mathbb{R})$.
   (d) Déterminer l'ensemble $g^{-1}(\mathbb{R})$. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

Exercice 3 **Facultatif** On note $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$ les courbes d'équations respectives «$y = \ln(x)$» et «$y = \exp(x)$» (dans un repère orthonormal).

1. (a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{L}$ en un point d'abscisse $a > 0$ et une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{E}$ en un point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$.
   (b) Démontrer qu'il existe une droite $\mathcal{D}$ tangente commune à la courbe $\mathcal{L}$ en un point d'abscisse $a > 0$ et à la courbe $\mathcal{E}$ en un point d'abscisse $b \in \mathbb{R}$ <u>si et seulement si</u>
   $$\left\{ \begin{array}{rcl} b + \ln(a) & = & 0 \\ a\ln(a) - \ln(a) - a - 1 & = & 0 \end{array} \right.$$
2. On définit la fonction φ sur $]0, +\infty[$ par :
   $$\varphi(t) = t\ln(t) - \ln(t) - t - 1.$$
   (a) Etudier les variations de φ sur l'intervalle $]0,1[$.
   (b) En déduire l'existence et l'unicité d'un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$.
   (c) Déterminer une relation simple entre $\varphi(x)$ et $\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$.
   (d) En déduire le nombre de solutions $x \in]0, +\infty[$ à l'équation «$\varphi(x) = 0$».
3. Existe-t-il une tangente commune aux courbes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{E}$?
   Si oui, combien y en a-t-il ? Illustrer la situation à l'aide d'un schéma.