

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la somme (le $n^{\text{ième}}$ **nombre harmonique**)

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

I - Divergence de la somme

1. A l'aide d'une propriété de fonctions vue en terminale, justifier
pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.
2. En déduire
pour tout $x > 0$, $\ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$.
De même, en déduire
pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x)$.
3. A l'aide de ce qui précède, établir un encadrement du terme H_n qui permette de trouver les valeurs des limites
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (H_n)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{H_n}{\ln(n)} \right)$.

II - Lien avec la limite d'autres sommes

On pose, pour tout $n \geq 1$: $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{n+p}$.

1. Calculer les valeurs de u_k pour $k \in \llbracket 1 ; 5 \rrbracket$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. Justifier : pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq 1$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge.
3. A l'aide des deux derniers encadrements de la partie précédente, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.
4. Etablir un lien entre $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ et u_n puis donner $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$.

III - Des termes H_n sont-ils entiers ?

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, il est clair que H_n est un nombre rationnel (c'est une somme de rationnels, et on sait que $\mathbb{Q}$, l'ensemble des nombres rationnels, est stable par addition). On veut démontrer, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 2$, la somme $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair.

Posons donc la proposition $P(n)$: « H_n est le quotient d'un nombre impair par un nombre pair».

1. Justifier $H_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2} H_n$, puis prouver l'implication $P(n) \Rightarrow P(2n)$ pour $n \geq 1$.
2. Justifier $H_{2n+1} = H_{2n} + \frac{1}{2n+1}$, puis prouver l'implication $P(n) \Rightarrow P(2n+1)$ pour $n \geq 1$.
3. Ainsi, on a prouvé, pour tout $n \geq 1$, l'implication $P(n) \Rightarrow (P(2n) \text{ et } P(2n+1))$.
Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $P(n)$ est vraie.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est un nombre rationnel : mais H_n peut-il être entier ?

IV - Une autre histoire de divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$: on considère $S_n = (2n)! \times H_{2n}$.

1. Justifier que S_n est un entier.
2. Montrer : $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{(2n)!}{k} + \frac{(2n)!}{2n+1-k} \right)$.
3. En déduire : $(2n+1)$ divise S_n .

V - Un lien avec les coefficients binomiaux

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Justifier la relation
$$\binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1} \quad (\mathcal{P}).$$

2. En déduire, pour $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}.$$

3. A l'aide de $(\mathcal{P})$, prouver :

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} H_k = \sum_{k=1}^n \left(\binom{k+1}{m+1} H_{k+1} - \binom{k}{m+1} H_k \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \binom{k+1}{m+1}.$$

4. En déduire :

$$\sum_{k=1}^n \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1} \left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) \quad (*).$$

5. (a) Pour tout $n \geq 1$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, calculer $\sum_{k=p}^n \frac{1}{p}$, et exprimer $\sum_{p=1}^n \frac{n+1-p}{p}$ en fonction de H_n .

(b) En déduire la valeur de la somme double $\sum_{1 \leq p \leq k \leq n} \frac{1}{p}$ en fonction de H_n .

(c) Vérifier alors si la formule $(*)$ de la question 4. est encore valable pour $m = 0$.

VI - Utilisation astucieuse d'une somme double

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\sum_{k=1}^n H_k^2$ sous la forme $a_n H_n^2 + b_n H_n + c_n$ où a_n , b_n et c_n sont des quantités polynomiales

en n . Indication : on pourra commencer par observer $\sum_{k=1}^n H_k^2 = \sum_{k=1}^n H_k \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{j} \right)$.

Exercice 2

Soit m un paramètre réel et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + my + 2z \\ x + 2y + (m+1)z \\ 2x + 4y + (2-m^2)z \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse à l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité et à l'espace image de f_m . Ainsi si l'on demande ce que l'on peut déduire d'un résultat et/ou calcul pour f_m , on attend une réponse relative à ces questions.

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $m = -2$.

(a) Calculer $f_{-2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_{-2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_{-2} ?

(b) Résoudre le système $f_{-2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que peut-on en déduire pour f_{-2} ?

(c) A quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, le système $f_{-2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet-il au moins une solution ? Que peut-on en déduire pour f_{-2} ?

2. On se place dans le cas général où $m \in \mathbb{R}$ est quelconque.

(a) Pour $m \notin \{-2, 0\}$, montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ l'équation $f_m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ admet toujours une unique solution. Que peut-on en déduire pour f_m ?

(b) Que dire de f_0 ?