Exercice

1. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice M. On note $\mathcal{C} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ et I_3 la matrice unité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $Q_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3)$.
   Justifier l'équivalence :
   $$(Q_M(\lambda) = 0) \Leftrightarrow (\text{il existe un vecteur } \vec{v} \text{ non nul tel que } f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}).$$
   (b) Calculer $Q_M(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: vérifier que Q_M est une fonction polynomiale de degré trois possèdant deux racines réelles λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$. On dit que λ_1 et λ_2 sont les *valeurs propres* de la matrice M.
   (c) Pour $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, on note $E_\lambda = \operatorname{Ker}(f - \lambda \mathrm{Id})$: ce sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^3$ est appelé *sous-espace propre de f associé à la valeur propre* λ, et les vecteurs non nuls de E_λ sont les *vecteurs propres de f associés à la valeur propre* λ.
   Pour chaque $\lambda \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$, à l'aide de la matrice $M - \lambda I_3$, déterminer la dimension et une base de E_λ : il est demandé de choisir une base de E_λ constituée de vecteurs dont la première composante est égale à 1.
   (d) Montrer que E_{λ_1} et E_{λ_2} sont supplémentaires dans $E = \mathbb{R}^3$.
   En déduire l'existence d'une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible telle que $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale de la forme $D = \operatorname{diag}(\alpha, \beta, \gamma)$ avec $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.
   Calculer les matrices D, P et P^{-1}.
2. Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C.
   A l'instant t=0, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On note A_n l'événement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
   On note B_n l'événement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
   On note C_n l'événement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».
   On pose $\mathbb{P}(A_n) = a_n$, $\mathbb{P}(B_n) = b_n$ et $\mathbb{P}(C_n) = c_n$.
   (a) Exprimer, **en le justifiant**, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Montrer comment les résultats de la question **1.** peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n. Limites de ces suites ? Interprétation ?