Exercice 1 Soit E, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, a et b deux réels distincts, p, q et f trois endomorphismes de E vérifiant (avec $I = \mathrm{Id}_E$) :

$$\text{(i) } I = p + q$$
$$\text{(ii) } f = ap + bq$$
$$\text{(iii) } f^2 = a^2 p + b^2 q$$

1. Calculer $(f - a\,I) \circ (f - b\,I)$.
2. (a) Etablir : $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (b) Montrer que p et q sont des projecteurs de l'espace E. Préciser les éléments caractéristiques de ces projecteurs.

On suppose désormais que $ab \neq 0$.

3. Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de p, q, a et b.
4. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $f^n = a^n p + b^n q$.
5. On rappelle que, par définition, si $k \in \mathbb{N}^*$, on a $f^{-k} = (f^{-1})^k = f^{-1} \circ f^{-1} \circ \cdots \circ f^{-1}$ (composée k fois).
   Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$: $f^n = a^n p + b^n q$.

On note $F = \mathbf{vect}(p, q)$, le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q.

6. Vérifier que $I \in F$ et que F est stable pour la loi de composition d'applications « $\circ$ » (autrement dit : vérifier que « $\circ$ » est une loi de composition interne sur F).
7. Prouver que, si la famille (p, q) est liée (dans l'espace $\mathcal{L}(E)$), alors p et q sont des homothéties vectorielles. Préciser alors les expressions possibles de p et q.

On suppose désormais que la famille (p, q) est libre (donc F est un plan vectoriel).

8. Pour tous couples de réels (x, y) et (x', y'), justifier l'implication :
$$(xp + yq = x'p + y'q) \Rightarrow (x = x' \text{ et } y = y').$$
9. Déterminer les éléments de F qui sont des projecteurs.
10. Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments u de F qui vérifient $u^2 = f$.
11. Une application numérique : soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On note f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par $f(X) = AX$ et $j(X) = JX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Déterminer λ tel que $p = \lambda j$ soit un projecteur de $\mathbb{R}^3$.
   On note alors $q = I - p$ où $I = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
   (b) Montrer que $f = 4p + q$ puis que $f^2 = 4^2 p + q$.
   (c) Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$ et exprimer f^{-1} à l'aide de f et de I.
   (d) Déterminer quatre matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, combinaisons linéaires de A et de J, telles que
$$M^2 = A.$$

Exercice 2 On note $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques définies et continues sur le segment $[0,1]$ (et à valeurs dans $\mathbb{R}$).

On définit l'application T qui à une fonction f de E associe la fonction notée $T(f)$, définie sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

On définit de même l'application S qui à une fonction f de E associe la fonction notée $S(f)$, définie sur le segment $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ S(f)(x) = \int_0^x e^{x-t} f(t)\mathrm{d}t.$$

ATTENTION : S et T sont définies sur E, ensemble de fonctions, ainsi f, $S(f)$ et $T(f)$ sont des fonctions. Donc $S\left(f(x)\right)$ n'a PAS de sens, l'écriture correcte est $S(f)(x)$ (qui est un nombre réel).

1. Quelques exemples : déterminer les fonctions $T(f)$ et $S(f)$ lorsque f est exp, sin, i (où $i = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, définie par $i(x) = x$).
2. (a) Soit f, une fonction de E : montrer [1] que $T(f)$ et $S(f)$ sont des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. Calculer alors leurs dérivées $T(f)'$ et $S(f)'$.
   (b) Montrer que S et T sont des endomorphismes de E.
   (c) Montrer que S et T sont des applications injectives.
   (d) Montrer [2] que S et T ne sont pas des automorphismes de E.
3. On note $S \circ T$ et $T \circ S$ les applications composées de S et T.
   (a) Montrer que [3], pour tout $f \in E$, $S \circ T(f) = S(f) - T(f)$.
   (b) Montrer que, pour tout $f \in E$, la dérivée de $T \circ S(f) = T\left(S(f)\right)$ est égale à $S(f)$.
   (c) En déduire les égalités $S \circ T = T \circ S = S - T$.
4. On note $I = \mathrm{Id}_E$, l'application identité de E (i.e pour tout $f \in E$, $I(f) = f$).
   Déduire, de ce qui précède, que les applications $I - T$ et $I + S$ sont des automorphismes de E réciproques l'un de l'autre.
5. Applications [4]
   (a) Déterminer la solution f_1 dans E de l'équation fonctionnelle suivante :
   $$\text{« } \forall x \in [0,1],\quad f(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x \text{ ».}$$
   (b) Déterminer la solution f_2 dans E de l'équation fonctionnelle suivante :
   $$\text{« } \forall x \in [0,1],\quad f(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x^2 \text{ ».}$$
   (c) Sans calculs, déterminer la solution f_3 dans E de l'équation fonctionnelle suivante :
   $$\text{« } \forall x \in [0,1],\quad f(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = x(1-x) \text{ ».}$$

1. Il pourra être intéressant de remarquer que $S(f)(x) = e^x \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\mathrm{d}t$.
2. Utiliser le fait qu'il existe des fonctions continues mais non-dérivables sur $[0,1]$: pour être complet, exhiber au moins une de ces fonctions.
3. Rappel : cela signifie, pour tout $x \in [0,1]$, $(S \circ T)(f)(x) = S(f)(x) - T(f)(x)$.
4. On pourra introduire et utiliser les fonctions i et c définies par, pour tout $x \in [0,1]$, $i(x) = x$ et $c(x) = x^2$.

(d) On définit, sur $[0,1]$, la fonction φ par
$$\varphi(x) = x\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}(x) + (1-x)\mathbb{1}_{]\frac{1}{2},1]}(x)$$
où $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction caractéristique [5] (ou indicatrice) de l'ensemble A.
Représenter le graphe de la fonction φ.
Déterminer la solution g dans E de l'équation fonctionnelle suivante :
$$\text{« } \forall x \in [0,1], \quad g(x) - \int_0^x g(t)\mathrm{d}t = \varphi(x) \text{ ».}$$

6. L'objet de cette question est de proposer une interprétation de l'application S.
Soit $f \in E$. On rappelle qu'on désigne par T^n le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'application linéaire T :
$T^2(f) = T \circ T(f) = T(T(f))$, $T^3(f) = T(T^2(f)) = T^2(T(f)) = T\left(T\left(T\left(f\right)\right)\right)$, ... , autrement dit $T^n(f) = T(T^{n-1}(f)) = T^{n-1}(T(f))$ avec la convention $T^0 = \mathrm{Id}_E$ et $T^1 = T$.

(a) Justifier que, pour $n \geqslant 1$, la fonction $T^n(f)$ est de classe C^n sur le segment $[0,1]$. Que vaut la dérivée première $(T^n(f))' = (T^n(f))^{(1)}$? La dérivée seconde $(T^n(f))'' = (T^n(f))^{(2)}$? Plus généralement, que vaut la dérivée $k^{\text{ième}}$ $(T^n(f))^{(k)}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$?
En déduire les valeurs de $(T^n(f))^{(k)}(0)$.

(b) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$: pour tout $x \in [0,1]$, $T^n(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\mathrm{d}t$.

(c) Montrer [6] que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \frac{e}{(n+1)!}$.

(d) En déduire, pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\left| S(f)(x) - \sum_{h=1}^{n} T^h(f)(x) \right| \leqslant \frac{e}{n!} \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

(e) Justifier alors : $\displaystyle S(f)(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{h=1}^{n} T^h(f)(x) \right)$. Autrement dit,
$$\text{pour tout } x \in [0,1],\ S(f)(x) = \sum_{h=1}^{+\infty} T^h(f)(x) \quad \text{(i.e)} \quad S(f) = T(f) + T^2(f) + T^3(f) + \dots$$

5. $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon.
6. L'inégalité de Taylor-Lagrange reste intégral(e) sera la bienvenue.